

I BENI PUBBLICI E LA CONDIZIONE DI SAMUELSON

Domenico Suppa

28/03/2011

Consideriamo un sistema economico nel quale si producono un bene privato, nella quantità x , e un bene pubblico, nella quantità y , mediante funzioni di produzione che danno luogo ad una certa curva di trasformazione $x = f(y)$. Poniamo che la collettività sia costituita da n individui ognuno con la propria funzione indice di utilità $U_i(x_i, y)$. Mentre il bene x è consumato in quantità differenti da ogni individuo (essendo un bene privato, divisibile ed escludibile), così come indica l'indice deponente i , il bene pubblico è consumato da tutti gli individui nella quantità totale prodotta y . Per determinare le condizioni di ottimo nella fornitura del bene pubblico si può massimizzare l'utilità di un individuo, diciamo l'individuo j , una volta fissata l'utilità di ogni altro individuo $i \neq j$, data la tecnologia e la disponibilità delle risorse produttive, sintetizzate entrambe nella curva di trasformazione posta come ulteriore vincolo del problema di massimo. Tale problema può essere formulato nel modo seguente: ¹

$$\max_{x, x_{i \neq j}, y} U_j \left(\left(x - \sum_{i \neq j} x_i \right), y \right) \quad (1)$$

$$\text{sub. to } U_i(x_i, y) = \bar{U}_i \quad \forall i \neq j \quad (2)$$

$$f(y) - x = 0 \quad (3)$$

Per determinare le soluzioni d'ottimo del problema (1)–(3) impostiamo la funzione lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, x_{i \neq j}, y, \lambda_{i \neq j}, \mu) = U_j \left(\left(x - \sum_{i \neq j} x_i \right), y \right) + \sum_{i \neq j} \lambda_i U_i(x_i, y) + \mu [f(y) - x] \quad (4)$$

¹Teniamo presente che:

$$x = x_j + \sum_{i \neq j} x_i$$

dove λ_i e μ sono n moltiplicatori di Lagrange (in numero pari al numero dei vincoli), e poniamo pari a zero le derivate rispetto ai primi tre argomenti della funzione $\mathcal{L}()$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \mu = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -\frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial U_j}{\partial y} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial y} + \mu \frac{df(y)}{dy} = 0 \quad (7)$$

Da questo sistema, ricavando μ e λ_i dalle equazioni (5)–(6) e sostituendoli nella (7), otteniamo la condizione d’ottimo:

$$-\frac{df(y)}{dy} = \frac{\frac{\partial U_j}{\partial y}}{\frac{\partial U_j}{\partial x_j}} + \sum_{i \neq j} \frac{\frac{\partial U_i}{\partial y}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial U_i}{\partial y}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}} \quad (8)$$

L’equazione (8) richiede che il *saggio marginale di trasformazione* deve essere uguale alla somma dei *saggi marginali di sostituzione* di ogni individuo; questa è la condizione di efficienza di Samuelson per un sistema economico nel quale sono presenti anche beni pubblici.²

Per effettuare un confronto con un sistema economico nel quale vi sono solo beni privati, ipotizziamo che y rappresenti la quantità totale di un bene divisibile ed escludibile al pari di x .³ Ora, il problema del consumatore j assume la forma:

$$\max_{x, x_{i \neq j}, y} U_j \left(\left(x - \sum_{i \neq j} x_i \right), \left(y - \sum_{i \neq j} y_i \right) \right) \quad (9)$$

$$\text{sub. to } U_i(x_i, y_i) = \bar{U}_i \quad \forall i \neq j \quad (10)$$

$$f(y) - x = 0 \quad (11)$$

²P. A. Samuelson (1954), “The Pure Theory of Public Expenditure”, *Review of Economics and Statistics* (November): 387–389.

³In questo caso avremo:

$$y = y_j + \sum_{i \neq j} y_i$$

e la lagrangiana è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, x_{i \neq j}, y, y_{i \neq j}, \lambda_{i \neq j}, \mu) &= \\ &= U_j \left(x - \sum_{i \neq j} x_i, y - \sum_{i \neq j} y_i \right) + \sum_{i \neq j} \lambda_i U_i(x_i, y_i) + \mu [f(y) - x] \end{aligned} \quad (12)$$

da questa funzione si deriva il sistema:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \mu = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -\frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial U_j}{\partial y_j} + \mu \frac{df(y)}{dy} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} = -\frac{\partial U_j}{\partial y_j} + \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial y_i} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (16)$$

riorganizzando e dividendo membro a membro la (13) e la (15), otteniamo la condizione:

$$-\frac{df(y)}{dy} = \frac{\frac{\partial U_j}{\partial y}}{\frac{\partial U_j}{\partial x_j}} \quad (17)$$

riorganizzando e dividendo membro a membro le (14) e le (16), otteniamo le condizioni:

$$\frac{\frac{\partial U_j}{\partial y_j}}{\frac{\partial U_j}{\partial x_j}} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial y_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}} \quad \forall i \neq j \quad (18)$$

ed infine, dalla (17) e dalle (18), le condizioni di ottimo per un sistema nel quale vi sono solo beni privati:

$$-\frac{df(y)}{dy} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial y_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

il *saggio marginale di sostituzione* di ogni individuo deve essere uguale al *saggio marginale di trasformazione*.