

Introduzione alla misura non parametrica dell'efficienza

Domenico Suppa (Università di Napoli "Federico II")

Università di Bergamo - Scienza delle finanze

20/05/2011

La Produzione

L'attività di produzione può essere rappresentata come la trasformazione di **inputs** in **outputs**.

Per valutare la produzione (per programmarla e gestirla) sono necessari (anche se non sufficienti) degli indicatori quantitativi:

- ▶ La **produttività** di un certo input è il rapporto tra la quantità di output, y , ottenuta dalla produzione, e la quantità x dell'input impiegato. Si tratta di una misura che presa singolarmente non esprime nessun giudizio sulla produzione se non si procede ad un qualche confronto.
- ▶ L'**efficienza**, invece, esprime sempre un confronto tra produttività (considerate per differenti livelli di attività produttiva, per diverse combinazioni di inputs, tra diverse **Unità Produttive** (DMUs), etc.)

Efficienza tecnica: definizione generale

- ▶ Una unità produttiva è tecnicamente efficiente se, a parità di inputs, l'incremento di un output può avvenire solo se si riduce almeno un altro output oppure se si aumenta almeno un input; è efficiente una unità produttiva nella quale la riduzione di un input, se non si vuole che si modifichino gli outputs, richiede l'aumento di almeno un altro input oppure è necessario accettare una riduzione di almeno un output.[Koopmans (1951)]
- ▶ Indichiamo con $L(y)$ tutte le combinazioni di inputs almeno in grado di produrre y e con $P(x)$ tutte le combinazioni di outputs che possono essere prodotte con le quantità x di inputs.
- ▶ Indichiamo con $IsoqL(y)$ le combinaizioni “minime” di inputs in grado di produrre y e con $IsoqP(x)$ indichiamo tutte le combinazioni “massime” di outputs che possono essere ottenute impiegando gli inputs nelle quantità x .

Efficienza tecnica: definizione e notazione

- ▶ Indichiamo con $EffL(y)$ tutte le combinazioni di inputs tecnicamente efficienti (per le quali non esiste un'altra combinazione x' diversa da x appartenente a $EffL(y)$, con componenti tutte strettamente minori o uguali a x ed in grado di produrre y).
- ▶ Indichiamo con $EffP(x)$ tutte le combinazioni di outputs tecnicamente efficienti (per le quali non esiste un'altra combinazione y' diversa da y appartenente a $EffP(x)$, con componenti tutte strettamente maggiori o uguali a y , che possa essere prodotta con x).
- ▶ Avremo in generale che $EffL(y)$ è un sottoinsieme di $IsoqL(y)$ che a sua volta è un sottoinsieme di $L(y)$ e che $EffP(x)$ è un sottoinsieme di $IsoqP(x)$ che a sua volta è un sottoinsieme di $P(x)$.

I diversi approcci alla misura dell'efficienza:

Vi sono due metodologie principali per misurare l'efficienza

- ▶ Gli approcci non parametrici che non formulano ipotesi sulla forma funzionale della frontiera della tecnica.
- ▶ Gli approcci parametrici assumono invece che la frontiera della tecnica rientri in una classe funzionale particolare (Cobb-Douglas, Constant Elasticity of Substitution, translogaritmica, etc.) e mirano all'individuazione di una specifica frontiera della produzione mediante la stima dei parametri che la caratterizzano.

Sussistono inoltre approcci più avanzati, misti, che cercano di sfruttare i pregi di entrambe queste modellistiche.

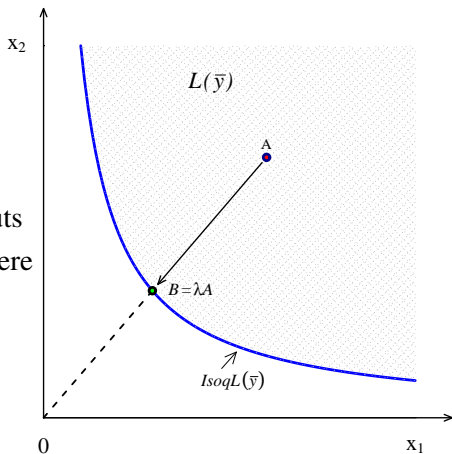
Nel seguito tratteremo degli approcci non parametrici.

La misura dell'efficienza

- ▶ La misura dell'efficienza consiste nell'attribuire ad ogni unità decisionale (DMU: Decision Making Unit) un punteggio compreso tra 0 (completa inefficienza) e 1 (massima efficienza). Tale misura può essere riferita agli inputs oppure agli outputs ed individua sempre un *benchmark* (cioè un punto di riferimento calcolato, detto *target*, che l'unità produttiva potrebbe raggiungere, migliorando la propria efficienza).
- ▶ Una delle misure più utilizzate a tale scopo è la *misura radiale*, introdotta da Debreu (1951) e Farrell (1957). Essa consiste nel paragonare la posizione di ogni DMU con il suo *target*, situato all'intersezione di una retta uscente dall'origine degli assi, passante per il punto che descrive la DMU, e l'isoquante (o la curva di trasformazione) corrispondente all'isolivello dell'output (o dell'input) della DMU esaminata.

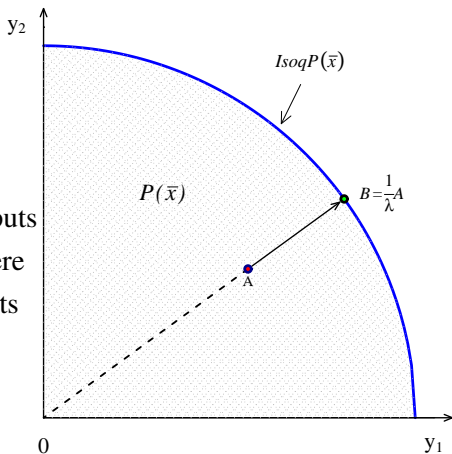
La misura radiale (“teorica”) dell’efficienza sugli inputs

λ rappresenta la massima contrazione equiproportionale degli inputs che ancora permette di ottenere i medesimi outputs



La misura radiale (“teorica”) dell’efficienza sugli outputs

$\frac{1}{\lambda}$ rappresenta la massima espansione equiproportionale degli outputs che è ancora possibile ottenere impiegando i medesimi inputs



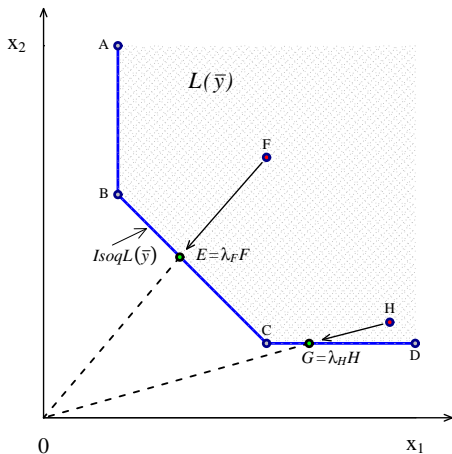
La misura radiale (“operativa”) dell’efficienza

- ▶ A livello operativo, i punteggi di efficienza, in base alla misura di Debreu-Farrell, sono calcolati contestualmente alla frontiera della tecnica (isoquanto o curva di trasformazione) resolvendo tanti problemi di programmazione lineare quante sono le DMUs coinvolte.
- ▶ La misura dell’efficienza rispetto all’approssimazione lineare convessa della frontiera delle combinazioni (di inputs o di outputs) ammissibili (DEA), oppure rispetto alla frontiera non convessa (FDH, e soprattutto in quest’ultimo caso), ammette che si presentino degli *slacks*, cioè degli ulteriori miglioramenti possibili di efficienza (conseguibili mediante spostamenti lungo la frontiera), subordinati (successivi) al raggiungimento del *target*.

Nota: La definizione di efficienza di Koopmans non ammette gli *slacks*.

La misura radiale (“operativa”) dell’efficienza sugli inputs

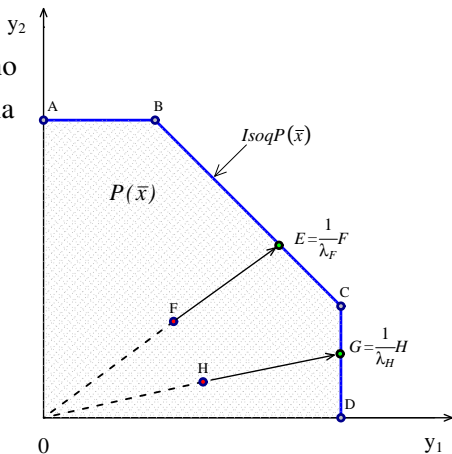
Solo i punti che appartengono al segmento BC soddisfano la definizione di Koopmans di $EffL(\bar{y})$.
B e C sono detti *peers* di F, il cui *traget* è E (una combinazione lineare e convessa di B e C).



La misura radiale (“operativa”) dell’efficienza sugli outputs

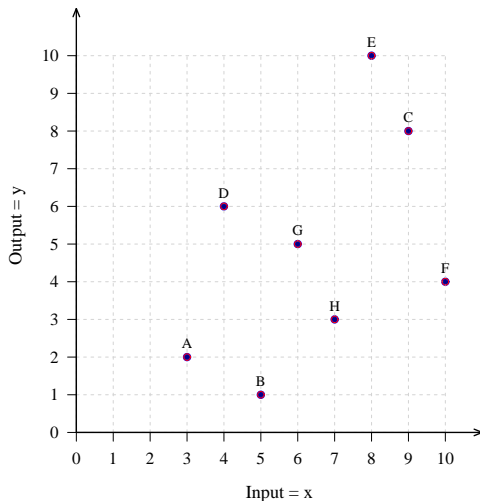
Solo i punti che appartengono al segmento BC soddisfano la definizione di Koopmans di $EffP(\bar{x})$.

B e C sono detti *peers* di F, il cui *traget* è E (una combinazione lineare e convessa di B e C).



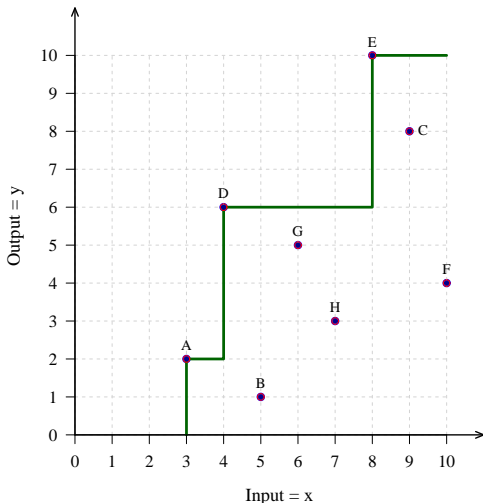
Tecnologia di produzione: 1 input \longrightarrow 1 output

DMUs	Input	Output
A	3	2
B	5	1
C	9	8
D	4	6
E	8	10
F	10	4
G	6	5
H	7	3



Frontiera di produzione free disposal hull (FDH)

Le frontiere FDH
non sono
convesse ed
aderiscono meglio
ai dati.



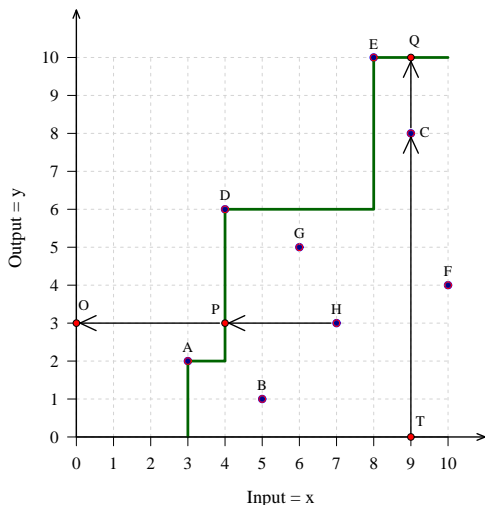
Misura radiale dell'efficienza sulla frontiera FDH

$$leff_H = \frac{OP}{OH} \simeq 0.57$$

La DMU H dovrebbe impiegare il 57% dell'input per diventare efficiente.

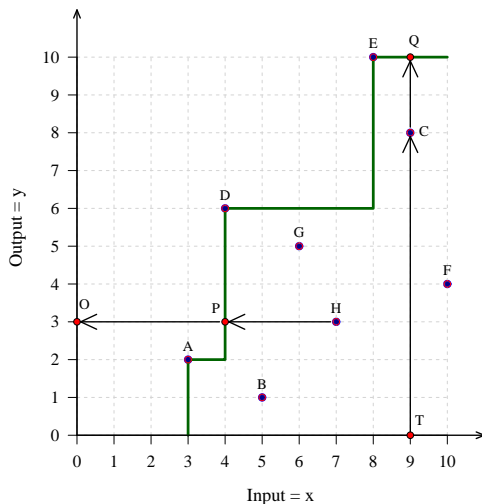
$$Oeff_C = \frac{CT}{QT} = 0.80$$

La DMU C produce all'80% delle sue possibilità.



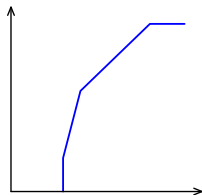
Misura radiale dell'efficienza sulla frontiera FDH

DMUs	Input	Output	I_{eff}	O_{eff}
A	3	2	1	1
B	5	1	0.60	0.17
C	9	8	0.89	0.80
D	4	6	1	1
E	8	10	1	1
F	10	4	0.40	0.40
G	6	5	0.67	0.83
H	7	3	0.57	0.50

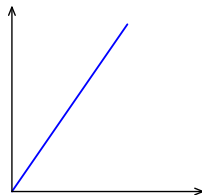


DEA: diverse ipotesi sui rendimenti di scala

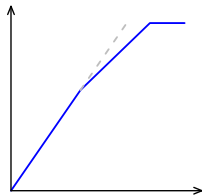
La Data
Envelopment
Analysis
può essere condotta
con diverse ipotesi
sui rendimenti di scala.



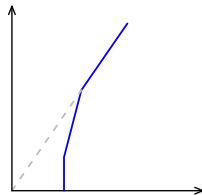
Variable returns to scale (VRS)



Constant returns to scale (CRS)



Non-increasing returns to scale (NIRS)

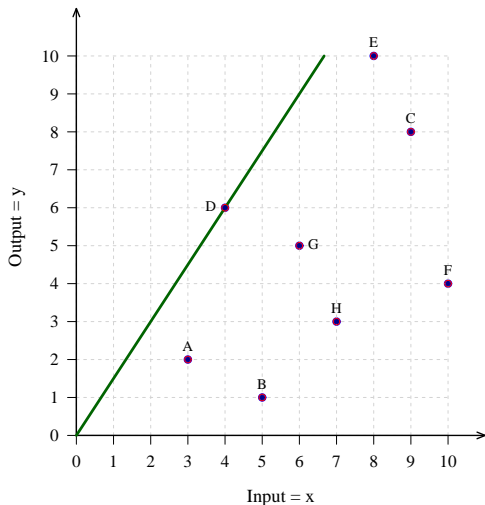


Non-decreasing returns to scale (NDRS)

DEA: rendimenti di scala costanti (CRS)

Data
Envelopment
Analysis
CRS

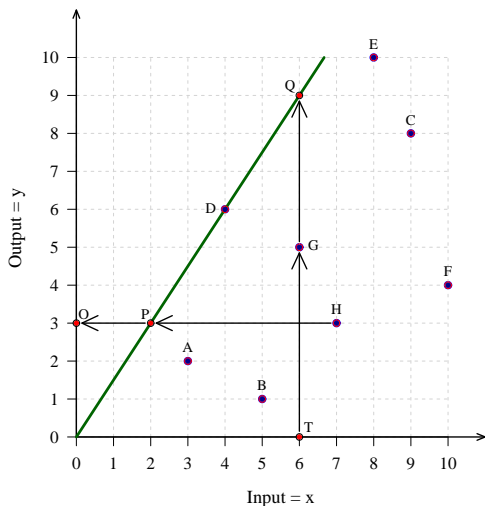
*Con frontiere CRS
 $leff_z = Oeff_z$
per il teorema di Taale*



Misura dell'efficienza sulla frontiera DEA-CRS

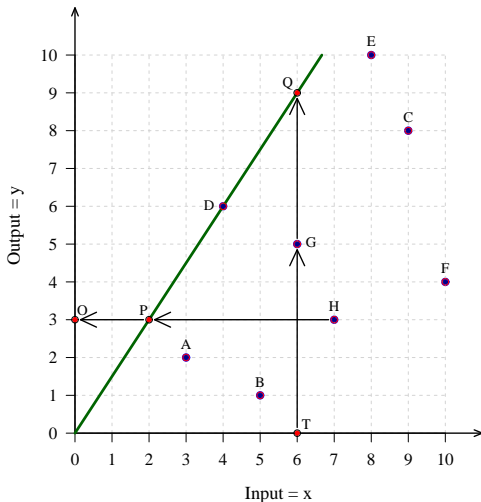
$$I_{eff_H} = \frac{OP}{OH} \approx 0.29$$

$$O_{eff_G} = \frac{GT}{QT} \approx 0.56$$



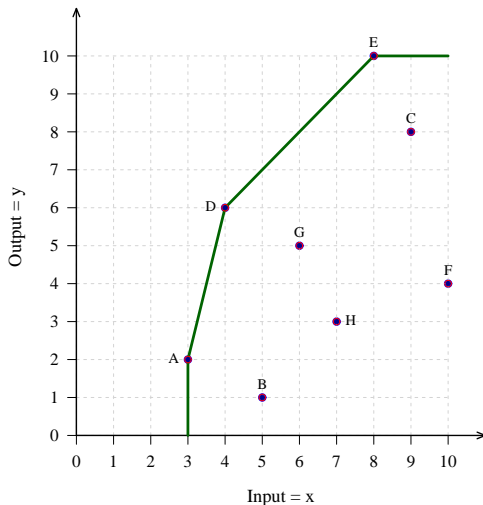
Punteggi di efficienza sulla frontiera DEA-CRS

DMUs	Input	Output	I_{eff}	O_{eff}
A	3	2	0.44	0.44
B	5	1	0.13	0.13
C	9	8	0.59	0.59
D	4	6	1	1
E	8	10	0.83	0.83
F	10	4	0.27	0.27
G	6	5	0.56	0.56
H	7	3	0.29	0.29



DEA: rendimenti di scala variabili (VRS)

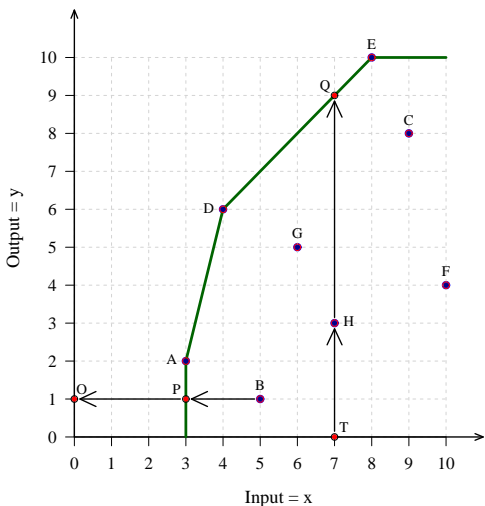
Data
Envelopment
Analysis
VRS



Misura dell'efficienza sulla frontiera DEA-VRS

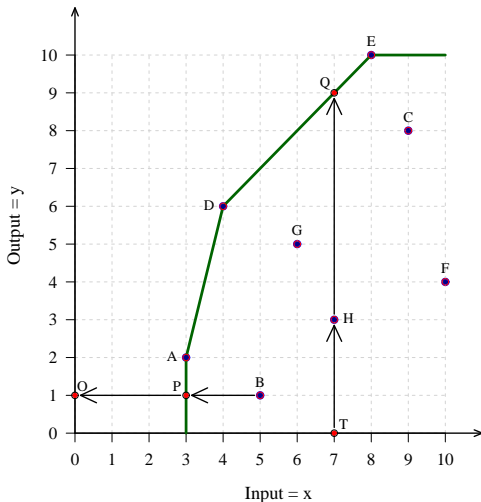
$$Ieff_B = \frac{OP}{OB} = 0.60$$

$$Oeff_H = \frac{HT}{QT} \approx 0.33$$



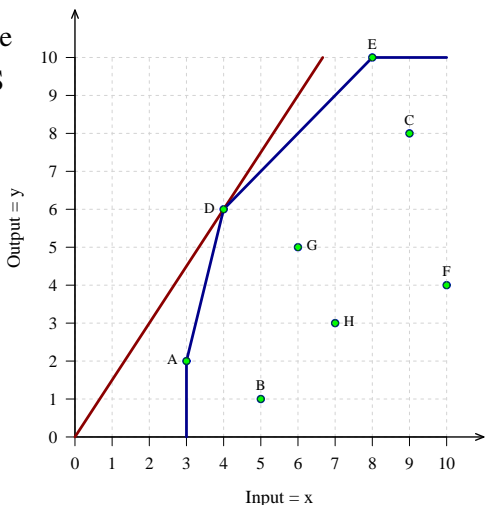
Punteggi di efficienza sulla frontiera DEA-VRS

DMUs	Input	Output	I_{eff}	O_{eff}
A	3	2	1	1
B	5	1	0.6	0.14
C	9	8	0.67	0.8
D	4	6	1	1
E	8	10	1	1
F	10	4	0.35	0.4
G	6	5	0.62	0.62
H	7	3	0.46	0.33



L'efficienza di scala dalle frontiere DEA CRS e VRS

Combinando le frontiere DEA-CRS e DEA-VRS si può determinare l'efficienza di Scala. Solo la DMU D produce alla scala ottimale di produzione che corrisponde al *costo medio minimo*.



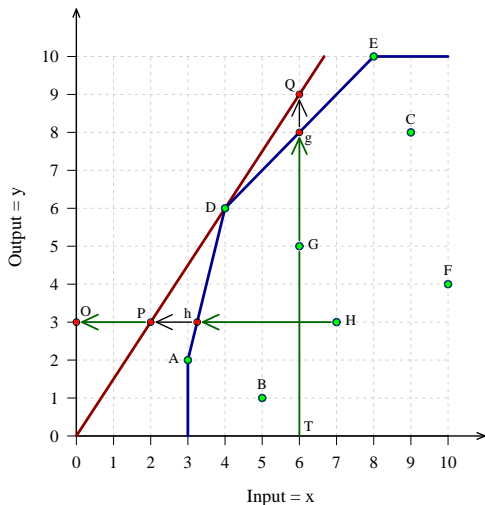
DEA: misura dell'efficienza di scala

$$ISeff_H = \frac{\frac{hH}{OH}}{\frac{PH}{OH}} = \frac{hH}{PH}$$

$$= \frac{leff_{VRS}}{leff_{CRS}} \approx 0.62$$

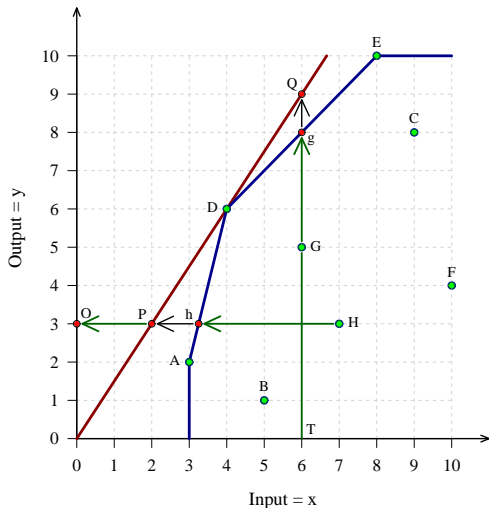
$$OSeff_G = \frac{\frac{GT}{QT}}{\frac{GT}{gT}} = \frac{gT}{QT}$$

$$= \frac{Oeff_{CRS}}{Oeff_{VRS}} \approx 0.89$$



DEA: punteggi di efficienza di scala

DMUs	Input	Output	$ISeff$	$OSeff$
A	3	2	0.44	0.44
B	5	1	0.22	0.93
C	9	8	0.89	0.74
D	4	6	1	1
E	8	10	0.83	0.83
F	10	4	0.76	0.67
G	6	5	0.89	0.89
H	7	3	0.62	0.86



Alcuni riferimenti bibliografici e note

- Maietta O. W., (2007), *L'analisi dell'efficienza. Tecniche di base ed estensioni recenti*, Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli.
- Färe R., Grosskopf S., Lovell C. A. K, (1994), *Production Frontiers*, Cambridge University Press.
- Berg S., (2010), *Water Utility Benchmarking: Measurement, Methodology, and Performance Incentives*, International Water Association.

Nota: Per le simulazioni si è utilizzato il pacchetto “*nonparaeff*” dell’ambiente statistico **R** (<http://www.r-project.org>).

Sommario:

La Produzione

L'efficienza

Alcuni riferimenti bibliografici