Note su ottimizzazione dinamica e crescita: effetti dell'impazienza nel consumo

Domenico Suppa*

16/11/2011

Introduzione

I problemi di ottimizzazione dinamica richiedono spesso la determinazione di una funzione che massimizza o minimizza il valore di un dato funzionale definito su un intervallo reale assegnato. Il funzionale da massimizzare o minimizzare è, nella maggior parte dei casi, un integrale. Per la soluzione dei casi più elementari ci si avvale degli strumenti più "semplici" del calcolo delle variazioni, altri problemi richiedono l'applicazione delle metodologie del controllo ottimo. Nel seguito saranno esposti alcuni fondamenti analitici di queste tecniche e un'applicazione per determinare l'effetto dell'impazienza nel consumo in un modello alla Ramsey-Solow.

L'equazione di Eulero: il problema più semplice del calcolo delle variazioni

I casi più semplici di ottimizzazione dinamica possono essere ricondotti al seguente problema di massimizzazione:

$$\max_{x(t)} \quad \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{1}$$

$$\text{s. to} \quad x(t_0) := x_0, x(t_1) := x_1 \tag{2}$$

*Università di Napoli "Federico II".

dove la funzione integranda $F(\cdot)$ è continua rispetto ai suoi argomenti ed ha derivate parziali continue rispetto a x e $\dot{x}$. L'obiettivo è quello di trovare una funzione $x^*(t)$ che risolve il problema (1), soddisfa i vincoli (2) ed è continua e differenziabile sull'intervallo $[t_0, t_1]$. Consideriamo una funzione ammissibile, ma non soluzione ottima, per il problema (1)-(2), che si discosti da $x^*(t)$ (soluzione ottima) nella misura definita dal prodotto di un parametro a per una funzione continua $h(t)$:

$$y(t) := x^*(t) + ah(t)$$

supponendo che la funzione $h(t)$ sia nulla negli estremi t_0 e t_1, si può verificare che anche $y(t)$ soddisfa tali vincoli (perché li soddisfano $x^*(t)$ e $h(t)$). Consideriamo la funzione $g(a)$:

$$g(a) := \int_{t_0}^{t_1} F(t, y(t), \dot{y}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*(t) + ah(t), \dot{x}^*(t) + a\dot{h}(t))dt$$

La funzione $g(a)$ dovrà raggiungere il suo massimo per $a = 0$ dato che $x^*(t)$ è la soluzione ottima del problema (1)-(2), solo in tal caso, infatti, risulta $y(t) = x(t)$. Pertanto la derivata della funzione g, rispetto al suo argomento a, dovrà essere nulla per $a = 0$. Quindi possiamo scrivere:[1]

$$\frac{dg(a)}{da} := \frac{\partial \int_{t_0}^{t_1} F(t, y(t), \dot{y}(t))}{\partial a} dt = \int_{t_0}^{t_1} F_x h + F_{\dot{x}} \dot{h}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_x h\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{\dot{x}} \dot{h}\, dt = 0$$

dove F_x rappresenta la derivata di $F(\cdot)$ rispetto al suo primo argomento. Integrando per parti l'ultimo integrale $\int_{t_0}^{t_1} F_{\dot{x}} \dot{h}\, dt$ otteniamo:[2]

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{\dot{x}} \dot{h}\, dt = [F_{\dot{x}} h]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t} h\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t} h\, dt$$

L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che la funzione $h(t)$ è nulla in corrispondenza dei valori estremi t_0 e t_1. Sostituendo nella derivata $\frac{dg(a)}{da}$, otteniamo:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x h - \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t} h\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t} \right) h\, dt = 0$$

Siccome questa condizione deve essere valida per qualunque funzione $h(t)$, continua e differenziabile sull'intervallo $[t_0, t_1]$ che si annulla in t_0 e t_1, ciò implica che

[1] Ricordando che: $\frac{\partial \int_A^B f(x,\alpha)dx}{\partial \alpha} = \int_A^B \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx$.

[2] Nei successivi passaggi si assume l'esistenza della derivata $\frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t}$, la validità di tale assunto può essere dimostrata, v. [Kameien and Schwartz, 1991, p. 19].

deve essere soddisfatta l'equazione di Eulero:[3] $F_x = \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t}$ che scritta per esteso è

$$F_x(t,x(t),\dot{x}(t)) = \frac{\partial F_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))}{\partial t} \tag{3}$$

Calcolando la derivata al secondo membro dell'equazione di Eulero, appare chiaro che la (3) è una equazione differenziale del secondo ordine in $x(t)$, infatti risulta:

$$F_x = F_{\dot{x}t} + F_{\dot{x}x}\dot{x} + F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}$$

La condizione del secondo ordine

L'equazione di Eulero stabilisce la condizione del primo ordine che deve essere soddisfatta dalla funzione $x^*(t)$, soluzione del problema (1)-(2). In analogia con l'analisi dei punti critici delle funzioni di variabili reali, è necessario stabilire se $x^*(t)$ massimizza il valore del funzionale obiettivo, come richiesto dalla (1). Si tratta, quindi, di calcolare la derivata seconda della funzione $g(a)$ in corrispondenza di $a = 0$:

$$\frac{d^2g(a)}{da^2} = \frac{\partial \int_{t_0}^{t_1} F_x h + F_{\dot{x}}\dot{h}\, dt}{\partial a} = \int_{t_0}^{t_1} F_{xx}h^2 + 2F_{x\dot{x}}h\dot{h} + F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2\, dt$$

tale derivata dovrà essere non positiva affinché la funzione $x^*(t)$ soddisfi il problema (1)-(2). Visto che la funzione integranda dell'ultimo integrale è una forma quadratica in h e $\dot{h}$, essa sarà non positiva se la funzione $F(\cdot)$ è concava in x e $\dot{x}$. Pertanto, è possibile stabilire la seguente condizione sufficiente per la soluzione del problema (1)-(2):

Se la funzione $F(t,x,\dot{x})$ è concava in x e $\dot{x}$, e se $x^*(t)$ soddisfa l'equazione di Eulero $F_x = \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t}$, allora $x^*(t)$ risolve il problema (1)-(2).

Talvolta può risultare utile una condizione meramente necessaria (*la condizione di Legendre*) che deve essere soddisfatta per avere $\frac{d^2g(a)}{da^2} \leq 0$. Tale condizione richiede che, oltre all'equazione di Eulero, sia soddisfatta la disuguaglianza $F_{\dot{x}\dot{x}} \leq 0$ (oppure $F_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0$ per un problema di minimizzazione). [4]

[3] Se non fosse soddisfatta l'equazione di Eulero, si genererebbe una contraddizione [Kameien and Schwartz, 1991, p. 16].

[4] V. [Kameien and Schwartz, 1991, p. 43].

Condizione finale ed estremo superiore non vincolato

Il problema (1)-(2) può essere modificato, eliminando il vincolo $x(t_1) := x_1$. In tal caso, fermo restando il discorso svolto in precedenza, la condizione del primo ordine: $\frac{dg(a)}{da} = 0$ per $a = 0$ diventa:

$$\frac{dg(a)}{da} = \int_{t_0}^{t_1} F_x h + F_{\dot{x}}\dot{h}\, dt = F_{\dot{x}}(t_1, \cdot)h(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t} \right) h\, dt = 0$$

perché, ora, la funzione $h(t)$ non è detto che sia nulla in t_1, ma può essere minore, maggiore o uguale a zero in corrispondenza di tale estremo. La derivata $\frac{dg(a)}{da} = 0$ calcolata per $a = 0$ potrà annullarsi solo se è ancora valida la condizione di Eulero ed inoltre il termine $F_{\dot{x}}(t_1, \cdot)h(t_1)$ è pari a zero. Ma, siccome $F_{\dot{x}}(t_1, \cdot)h(t_1) = 0$ è una condizione richiesta per qualunque funzione $h(t)$, anche se $h(t_1) \neq 0$, si dovrà avere $F_{\dot{x}}(t_1, \cdot) = 0$ (questa condizione è nota come *condizione di trasversalità*).

Se il secondo vincolo del problema originario viene sostituito da $x(t_1) \geq x_1$ assegnato, allora è necessario distinguere il caso nel quale la soluzione è $x^*(t_1) > x_1$ da quello nel quale $x^*(t_1) = x_1$.

- $x^*(t_1) > x_1$: la funzione $g(a)$ dovrà possedere un massimo locale per $a = 0$ e, quindi, la sua derivata in tale punto dovrà essere nulla. Pertanto la condizione di trasversalità è la stessa che si è ottenuta per l'estremo finale libero (nessun vicolo in t_1): $F_{\dot{x}}(t_1, \cdot) = 0$

- $x^*(t_1) = x_1$: per ogni funzione ammissibile che assume il valore $y(t_1) = x^*(t_1) + ah(t_1) \geq x_1$ si dovrà avere $ah(t_1) \geq 0$. Scegliendo $h(t)$ di modo che risulti $h(t_0) = 0$ e $h(t_1) > 0$, la funzione $y(t)$ risulterà ammissibile per ogni $a \geq 0$, e pertanto $g(a) \leq g(0)$ per ogni $a \geq 0$. Ciò implica che la derivata della funzione $g(a)$ dovrà risultare non positiva, così che $F_{\dot{x}}(t_1, \cdot)h(t_1) \leq 0$ (visto che l'equazione di Eulero dovrà comunque essere soddisfatta). Quindi, siccome $h(t_1) > 0$, dovrà essere $F_{\dot{x}}(t_1, \cdot) \leq 0$.

In definitiva, per avere la soluzione ottima del problema di massimo, il valore $F_{\dot{x}}(t_1, \cdot)$ dovrà essere sempre non positivo, ma dovrà essere nullo se $x^*(t_1) > x_1$. In ogni caso, dovrà essere soddisfatta l'equazione di Eulero e la funzione $F(\cdot)$ dovrà essere concava rispetto a x e $\dot{x}$.

Nei problemi di minimizzazione la condizione $F_{\dot{x}}(t_1, \cdot) \leq 0$ dovrà essere sostituita dalla condizione $F_{\dot{x}}(t_1, \cdot) \geq 0$ e il requisito di concavità di F con quello di convessità.

Le *condizioni di trasversalità* possono essere ricavate per un insieme più generale di casi riguardo ai vincoli imposti su t_1 e al corrispondente valore x_1. In molte circostanze, ad esempio, t_1 è incognito e il valore finale x_1 può essere libero o soggetto a disuguaglianze.

Fissata, come in precedenza, la funzione soluzione $x^*(t)$ del problema (1)-(2), per il quale siano ora considerati incogniti sia t_1 che x_1, riformuliamo la funzione *perturbata* $y(t)$ tenendo conto del fatto che l'estremo superiore del suo dominio può non coincidere con quello ottimo, t_1, della funzione soluzione $x^*(t)$. Tra i rispettivi valori terminali delle funzioni $y(t)$ e $x^*(t)$ vi sarà una differenza data da $\delta x_1 := y(t_1 + \delta t) - x^*(t_1)$. In corrispondenza di t_1 lo scostamento delle due funzioni sarà pari ad $h(t_1) = y(t_1) - x^*(t_1)$. La funzione $g(a)$ avrà quindi la seguente forma:

$$\begin{aligned} g(a) :&= \int_{t_0}^{t_1 + a\delta t_1} F(t_1, y(t), \dot{y}(t))\, dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1 + a\delta t_1} F(t, x^*(t) + ah(t), \dot{x}^*(t) + a\dot{h}(t)) dt \end{aligned}$$

Dove $a\delta t_1$ è lo scostamento dell'estremo superiore del dominio della funzione perturbata $y(t)$ rispetto all'estremo (ottimo) del domino della funzione $x^*(t)$: t_1. Applicando la regola di derivazione sotto integrale di Leibniz, poniamo la consueta condizione d'ottimo: [5]

$$\begin{aligned} \frac{dg(a)}{da} &= F(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1))\delta t + \int_{t_0}^{t_1} F_x h + F_{\dot{x}} \dot{h}\, dt = \\ &= F(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1))\delta t + F_{\dot{x}}(t_1, \cdot) h(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t} \right) h\, dt := 0 \end{aligned}$$

Lo scarto nei valori terminali delle funzioni $y(t)$ e $x^*(t)$ può essere approssimato sommando alla loro differenza in t_1 (data da $h(t_1)$), l'approssimazione lineare dell'incremento subito dalla funzione $x^*(t)$ nell'intervallo δt è:

$$\delta x_1 := h(t_1) + \dot{x}^*(t_1)\delta t$$

e quindi si avrà:

$$h(t_1) = \delta x_1 - \dot{x}^*(t_1)\delta t$$

Sostituendo $h(t_1)$ nella derivata della funzione $g(a)$, calcolata per $a = 0$, abbiamo:

$$\frac{dg(a)}{da} = [F(t_1, \cdot) - \dot{x}(t_1) F_{\dot{x}}(t_1, \cdot)]\delta t + F_{\dot{x}}(t_1, \cdot)\delta x_1 + \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t} \right) h\, dt = 0$$

[5] Posto che gli estremi di integrazione, A e B, siano funzioni di α, la regola di Leibniz stabilisce che: $\frac{\partial \int_{A(\alpha)}^{B(\alpha)} f(x,\alpha) dx}{\partial \alpha} = f(B(\alpha), \alpha)\frac{dB(\alpha)}{d\alpha} - f(A(\alpha), \alpha)\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} + \int_{A(\alpha)}^{B(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx$.

Per dimostrare questa formula si può derivare la funzione $\Phi(A(\alpha), B(\alpha), \alpha) = \int_{A(\alpha)}^{B(\alpha)} f(x,\alpha) dx$ rispetto a α.

Siccome l'equazione di Eulero dovrà essere soddisfatta da ogni funzione soluzione del problema (1)-(2), l'ultimo integrale dovrà assumere valore zero e la condizione d'ottimo precedente si ridurrà alla seguente *condizione generale di trasversalità*:

$$[F(t_1,\cdot) - \dot{x}(t_1)F_{\dot{x}}(t_1,\cdot)]\delta t + F_{\dot{x}}(t_1,\cdot)\delta x_1 = 0 \tag{4}$$

che, insieme alla condizione iniziale $x(t_0) = x_{t_0}$, servirà a determinare le costanti di integrazione nella soluzione dell'equazione di Eulero. Si possono avere quindi quattro tipi di condizioni di trasversalità.

1. Nel caso siano assegnati t_1 e x_1, la (4) si ruduce ad una identità e vale quanto si è detto per la soluzione del problema (1)-(2), con estremi entrambi assegnati.

2. Nel caso t_1 sia dato ma x_1 sia libero, ciò significa che δt_1 è zero e δx_1 può assumere qualsiasi valore e, pertanto, si dovrà avere $F_{\dot{x}}(t_1,\cdot) = 0$ (come si è già mostrato in precedenza).

3. Se t_1 è libero ma x_1 è assegnato, allora δx_1 è nullo e si dovrà avere:

$$F(t_1,\cdot) - \dot{x}(t_1)F_{\dot{x}}(t_1,\cdot) = 0$$

   per qualunque valore assuma δt_1.

4. Se t_1 e x_1 sono entrambi liberi, allora dovranno essere soddisfatte entrambe le condizioni:

   i) $F_{\dot{x}}(t_1,\cdot) = 0$

   ii) $F(t_1,\cdot) - \dot{x}(t_1)F_{\dot{x}}(t_1,\cdot) = F(t_1,\cdot) = 0$

Controllo ottimo

I problemi di ottimizzazione dinamica affrontati con gli strumenti del controllo ottimo si presentano spesso nella forma seguente:

$$\max_{u,x} \quad \int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t),u(t))dt \tag{5}$$

$$\text{s. to} \quad \dot{x}(t) = g(t,x(t),u(t)) \tag{6}$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad \textit{assegnato} \tag{7}$$

dove la funzione $x(t)$ dipende dalla funzione $u(t)$ attraverso il vincolo (6) detto *equazione di stato*. La funzione $x(t)$ viene detta *variabile di stato* e la funzione $u(t)$ è detta *variabile di controllo*. L'equazione di stato (6) descrive la dinamica fondamentale del sistema.

Sulla falsa riga del ragionamento svolto per derivare l'equazione di Eulero, per descrivere i criteri di soluzione del problema (5)-(7), si introducono le versioni *perturbate* delle funzioni $x(t)$ e $u(t)$: $x(t,a)$ e $u(t,a)$. Posto che esistano le funzioni x^* e u^* che massimizzano il funzionale in (5), soddisfacendo i vincoli (6)-(7), si può stabilire la seguente disuguaglianza tra funzionali:

$$I(a) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t,a),u(t,a))dt \leq \int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t),u(t))dt = I(0)$$

per ogni valore di a sufficientemente vicino a zero. Affinché $I(a)$ raggiunga il suo massimo in $a = 0$, dovrà aversi $\frac{dI(a)}{da} = 0$ per $a = 0$. Così, tenendo presente il vincolo (6), il problema (5)-(7) può essere tradotto in una massimizzazione vincolata, per ogni istante di tempo compreso nell'intervallo $[t_0, t_1]$, dal seguente integrale:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t,a),u(t,a)) + \lambda(t)[g(t,x(t,a),u(t,a)) - \dot{x}(t,a)]dt$$

Tenendo conto dell'uguaglianza $\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x}(t,a)dt = [\lambda(t)x(t,a)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}(t)x(t,a)dt$, l'integrale precedente può essere scritto come:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t,a),u(t,a)) + \lambda(t)g(t,x(t,a),u(t,a))dt +$$
$$- [\lambda(t)x(t,a)]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}(t)x(t,a)dt$$

ed essendo $x(t_0,a) = x(t_0) = x_0$ assegnato (per ogni a), derivando rispetto ad a e riordinando si ottiene:[6]

$$\int_{t_0}^{t_1} (F_x + \lambda g_x + \dot{\lambda})x_a + (F_u + \lambda g_u)u_a dt - \lambda(t_1)x_a(t_1,a)$$

[6] I pedici deponenti indicano la variabile rispetto alla quale è calcolata la derivata: $x_a := \frac{\partial x(\cdot)}{\partial a}$.

Tale derivata risulterà nulla per $a = 0$ solo se:

i) $\dot{\lambda} = -(F_x + \lambda g_x)$

ii) $F_u + \lambda g_u = 0$

iii) $\lambda(t_1) = 0$

Per pervenire ad una soluzione del sistema (5)-(7), oltre a queste tre condizioni necessarie, dovranno essere soddisfatti i vincoli:

iv) $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$

v) $x(t_0) = x_0$

In pratica, derivando l'*Hemiltoniano*, definito come:

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) := F(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) g(t, x(t), u(t))$$

rispetto ai suoi argomenti, e ponendo:

(H1) $H_u = F_u + \lambda g_u = 0$

(H2) $\dot{\lambda} = -H_x = -(F_x + \lambda g_x)$

(H3) $\dot{x} = H_\lambda = g(t, x(t), u(t))$

(H4) $x(t_0) = x_0$

(H5) $\lambda(t_1) = 0$

si ottengono tutte le condizioni necessarie per la soluzione del problema (5)-(7). Seguendo la terminologia in uso, λ viene detta variabile *aggiunta* o *di costato* e l'equazione (H2) è denominata *equazione aggiunta* o *equazione di costato*. L'equazione (H5) è una *condizione di trasversalità*.

Le condizioni sufficienti perché sia possibile risolvere il problema (5)-(7), richiedono che le funzioni $F(\cdot)$ e $g(\cdot)$ siano concave negli argomenti x e u.[7]

[7] I problemi di minimizzazione possono essere trattati invertendo il segno della funzione $F(\cdot)$. V. [Sydsaeter et al., 2008, p. 335 e ss.].

Un caso particolare di controllo ottimo: l'equazione di Eulero

L'equazione di Eulero può essere ricavata dal seguente problema di controllo ottimo:

$$
\begin{aligned}
\max_{u,x} \quad & \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt \\
\text{s. to} \quad & \dot{x}(t) = u(t) \\
& x(t_0) = x_0 \qquad\qquad \textit{assegnato}
\end{aligned}
$$

Infatti, in questo caso, l'Hemiltoniano assume la forma:

$$H = F(t, x, u) + \lambda u$$

Dalla prima condizione necessaria (H1) si ha:

$$H_u = F_u + \lambda = 0$$

considerato il vincolo $\dot{x} = u$, la precedente condizione diventa:

$$F_{\dot{x}} = -\lambda$$

che deve essere soddisfatta per ogni $t \in [t_0, t_1]$. Quindi, derivando rispetto a t ambo i membri:

$$\frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t} = -\dot{\lambda}$$

Dalla seconda condizione necessaria (H2) risulta:

$$\dot{\lambda} = -H_x = -F_x$$

e sostituendo:

$$F_x = \frac{\partial F_{\dot{x}}}{\partial t}$$

che è l'equazione di Eulero. Infine, la condizione di trasversalità $\lambda(t_1) = 0$, richiesta nella soluzione del problema di controllo ottimo, equivale alla condizione di trasversalità richiesta dal problema (1)-(2), come è facile verificare in base all'uguaglianza ricavata poco sopra dalla condizione (H1).

Il programma di ottimo del consumatore

Il problema del consumatore è quello di massimizzare al propria utilità su un determinato arco temporale che va da t_0 a t_1. L'utilità è una funzione del consumo istantaneo, $c(t)$, e indica il livello di soddisfazione del consumatore per ogni istante temporale (l'utilità U è una funzione crescente e concava di c). L'utilità totale da massimizzare è data dal seguente funzionale:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)} U(c(t))dt$$

L'utilità viene attualizzata al tasso $\delta \geq 0$ che costituisce il disincentivo a posporre il consumo nel tempo: se $\delta = 0$, i consumi futuri hanno lo stesso peso del consumo corrente (effettuati al tempo t_0) nell'obiettivo del consumatore (nella massimizzazione del funzionale). Al crescere di δ, i consumi futuri avranno un peso via via sempre più basso (e decrescente) rispetto al consumo corrente. Pertanto, δ rappresenta il tasso di preferenza intertemporale sui consumi da parte del consumatore (l'incentivo a consumare oggi piuttosto che domani: l'impazienza del consumatore).

Ogni attività di consumo richiede l'impiego di risorse che nel caso del singolo consumatore hanno la seguente dinamica:

$$\dot{a}(t) = w(t) + ra(t) - c(t)$$

tale equazione pone la variazione istantanea della ricchezza posseduta al tempo t, indicata con la funzione $a(t)$, uguale alla somma del reddito percepito nell'istante t, indicato con la funzione $w(t)$, degli interessi istantanei $ra(t)$, ottenuti in ragione del tasso di interesse fisso r, al netto della ricchezza destinata al consumo $c(t)$ nello stesso istante t. L'*equazione di stato* può essere resa esplicita rispetto a $c(t)$ (ottenendo: $c(t) = w(t) + ra(t) - \dot{a}(t)$) e sostituita nel funzionale dell'utilità complessiva oggetto del programma di ottimo del consumatore:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)} U(w(t) + ra(t) - \dot{a}(t))dt$$

Supposto noto l'ammontare della ricchezza al tempo t_0 (per cui $a(t_0) = a_0$ è la condizione iniziale) e la funzione $w(t)$, il precedente funzionale deve essere massimizzato determinando la funzione $a(t)$ ottima. Il problema del consumatore è stato così ricondotto al caso più semplice del calcolo delle variazioni: l'equazione di Eulero può essere utilizzata per giungere alla soluzione. Ponendo, per semplicità, che $t_0 = 0$, ricaviamo quindi la seguente condizione necessaria:

$$re^{-\delta t}U'_c = \frac{\partial(-e^{-\delta t}U'_c)}{\partial t}$$

e sviluppando la derivata al secondo membro:

$$re^{-\delta t}U'_c = \delta e^{-\delta t}U'_c - e^{-\delta t}\dot{c}U''_c$$

dove U'_c indica la derivata prima e U''_c la derivata seconda della funzione $U(c)$. Semplificando e riorganizzando i termini, si ottiene:

$$-\frac{\dot{c}}{c}\frac{U''_c}{U'_c}c = r - \delta$$

Indicando con γ l'*elasticità dell'utilità marginale rispetto al consumo*:

$$\gamma = -\frac{U''_c}{U'_c}c \geq 0$$

si può scrivere la condizione d'ottimo intertemporale del consumatore, spesso denominata "equazione di Eulero":

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \delta}{\gamma}$$

tale condizione definisce implicitamente l'*elasticità di sostituzione intertemporale* (la derivata del primo membro rispetto ad r) come il reciproco dell'*elasticità dell'utilità marginale rispetto al consumo* ($\frac{1}{\gamma}$). Essendo γ positiva per definizione (dati gli assunti sulla funzione di utilità, l'utilità marginale è positiva e decrescente), avremo che il segno del primo membro (il tasso di crescita istantaneo del consumo) sarà pari a quello della differenza $r - \delta$. In particolare, se il disincentivo a rinviare i consumi nel tempo (in altre parole, l'incentivo a consumare subito le risorse disponibili) non è troppo elevato (più precisamente, inferiore al tasso di interesse che rappresenta l'incentivo a risparmiare), allora il consumo istantaneo risulterà crescente, viceversa tale consumo risulterà decrescente nel tempo. In definitiva, la formula dell'*elasticità di sostituzione intertemporale* è:

$$\frac{d\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)}{dr} = \frac{1}{\gamma} = -\frac{U'_c}{U''_c}c$$

Il modello di crescita di Solow

Consideriamo un sistema economico in equilibrio di piena occupazione, chiuso agli scambi con l'estero e senza settore pubblico.[8] Sotto queste ipotesi la produzione totale è uguale alla spesa aggregata, costituita da consumi C e Investimenti I, per cui: $Y = C + I$. Inoltre, supponiamo di poter descrivere la produzione del prodotto interno lordo Y del sistema economico mediante una funzione di produzione $F(\cdot)$ omogenea di primo grado (rendimenti di scala costanti) rispetto ai sui fattori produttivi: lavoro L e capitale K.[9] Le produttività marginali dei due fattori sono per ipotesi positive e decrescenti. Il capitale è l'unica risorsa produttiva riproducibile mentre il lavoro è regolato da una legge di crescita esponenziale (con tasso di crescita esogeno pari ad n): $L(t) := e^{nt}L_0$. Gli investimenti istantanei $I(t)$ sono pari alla somma della variazione istantanea del capitale $\dot{K}$ e degli ammortamenti istantanei λK (dovuti al deperimento fisico e tecnologico del capitale): $I = \dot{K} + \lambda K$. Definiamo l'investimento pro capite: $i := \frac{I}{L}$.

Ricaviamo innanzitutto la forma *intensiva* (tutte le variabili sono espresse in termini pro capite) dalla funzione di produzione $Y = F(K,L)$ e definiamo $k := \frac{K}{L}$,

$$Y = LF(\frac{K}{L}, 1) \Rightarrow \frac{Y}{L} = y = f(k)$$

Con l'ipotesi di rendimenti di scala costanti, l'unica scelta di produzione rilevante per la determinazione del prodotto pro capite è il rapporto tra capitale e lavoro k.

Ricordando la definizione di L e di k, si ha:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

$$\dot{k} = \frac{dk}{dt} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - nk \Rightarrow \frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk$$

e siccome $i = \frac{\dot{K}}{L} + \lambda k$, sostituendo, risulta:

$$i = \dot{k} + nk + \lambda k$$

Quindi, l'incremento della dotazione di capitale per addetto $\dot{k} = i - (n+\lambda)k$ sarà positivo se l'investimento pro capite i è in grado di compensare la dotazione di

[8] V. [Solow, 1956].

[9] Per funzioni di produzione omogenee di primo grado abbiamo: $F(K,L) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha K, \alpha L)$. La derivata del secondo membro rispetto ad α deve essere pari a zero per ogni α: $-F(K,L) + \frac{1}{\alpha}(F_K K + F_L L) = 0$, anche per $\alpha = 1$, quindi: $F(K,L) = F_K K + F_L L$. Inoltre, data l'omogeneità di primo grado di $F(K,L)$ possiamo scrivere: $f(k) := F(\frac{K}{L}, 1) = \frac{F(K,L)}{L} \Leftrightarrow Lf(k) = F(K,L)$, per cui $F_K = \frac{\partial Lf(k)}{\partial K} = 0 + L\frac{f'(k)}{L} = f'(k)$ e $F_L = \frac{\partial Lf(k)}{\partial L} = f(k) + LK\frac{f'(k)}{L^2} = f(k) - kf'(k)$.

capitale per i nuovi lavoratori nk più l'ammortamento λk pro capite, lasciando inoltre un residuo positivo. Visto che per definizione $f(k) = y = c + i$, dove $c := \frac{C}{L}$, possiamo scrivere l'*equazione fondamentale della teoria della crescita*:

$$f(k) = c + \dot{k} + nk + \lambda k$$

Seguendo Solow, si può immaginare che il risparmio pro capite $y - c$ sia una quota fissa del reddito pro capite in base ad un parametro comportamentale $s \in [0, 1]$, per cui $sf(k) = f(k) - c$. In tal modo l'equazione fondamentale della teoria della crescita può essere riformulata nel modo seguente:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \lambda)k \tag{8}$$

La dinamica del sistema descritta dalla precedente equazione differenziale individua lo stato stazionario (nel quale prodotto e capitale pro capite restano costanti nel tempo: $\dot{k} = 0$) come l'uguaglianza tra risparmio pro capite ed investimenti necessari a reintegrare la riduzione di capitale pro capite dovuta al suo deperimento (ammortamento) e all'aumento della popolazione. Perché esista questo punto di equilibrio stazionario (e sia stabile) è necessario che la funzione di produzione pro capite $f(k)$ soddisfi le *condizioni di Uzawa*:[10]

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0, \qquad \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$$

oltre alle consuete: $f(0) = 0, \quad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0$. Date queste condizioni, partendo da una situazione di equilibrio ($\dot{k} = 0$), si può verificare che dopo un qualunque shock sui parametri (s, n, λ), sulla dotazione di capitale o sulla tecnologia di produzione, il sistema raggiunge di nuovo un equilibrio ad una velocità che è inizialmente elevata ma che si riduce via via che ci si approssima al nuovo equilibrio. Ciò può essere dedotto dall'equazione (8) e dall'andamento crescente e concavo della funzione $f(k)$ che implica un andamento decrescente della produttività media del capitale pro capite $\frac{f(k)}{k}$. Dividendo per k la (8), infatti, si dimostra che il tasso di crescita di k tende ad annullarsi per $\frac{sf(k)}{k}$ che tende a $n + \lambda$. Una volta raggiunto l'equilibrio stazionario ($\frac{sf(k)}{k} = n + \lambda$) il sistema viene a trovarsi in una situazione di *crescita bilanciata* (le variabili L, K e Y hanno tutte lo stesso tasso di crescita): visto che in tale punto la dotazione di capitale e il reddito pro capite (k ed $f(k)$) sono costanti (poiché $\frac{\dot{k}}{k} = 0$), allora il tasso di crescita dello stock di capitale è uguale al tasso di crescita della forza lavoro ($\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L}$) e, quindi, anche la produzione $Y = Lf(k)$ cresce al tasso $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{L}}{L}$.

Dato che il consumo pro capite è pari alla differenza tra prodotto e risparmio pro capite ($c = f(k) - sf(k)$) e che in equilibrio di stato stazionario $sf(k) =$

[10] V. [Gandolfo, 1973, p 466].

$(n+\lambda)k$, si può determinare quale è la dotazione di capitale pro capite k^* che massimizza il consumo pro capite:

$$c = f(k) - (n+\lambda)k \tag{9}$$

Derivando c rispetto a k, si perviene alla condizione d'ottimo:

$$f'(k^*) = n+\lambda \tag{10}$$

che, effettivamente, massimizza il consumo pro capite, dato che $\frac{d^2c}{dk^2} = f''(k) < 0$. L'equazione (10) consente, quindi, di calcolare la dotazione di capitale pro capite k^* corrispondente alla regola aurea (*golden rule*) da seguire per ottenere il massimo consumo pro capite. Dalla (8) (posto $\dot{k} = 0$) si può ricavare poi la propensione al risparmio (e l'investimento pro capite) che permette di raggiungere questo risultato.

Quando $k < k^*$ si parla di *efficienza dinamica*, in relazione al livello del consumo pro capite, mentre quando $k > k^*$ si ha *inefficienza dinamica*.

Ramsey: la *golden rule* modificata

Gli assunti imposti alla funzione di produzione nell'ultimo paragrafo implicano che $F_K = f'(k)$. Se la produttività marginale del capitale copre integralmente il costo del capitale:[11]

$$F_K = r+n+\lambda \Leftrightarrow f'(k) = r+n+\lambda \Leftrightarrow r = f'(k) - n - \lambda$$

Con questa definizione del rendimento del capitale r, la condizione d'ottimo intertemporale del consumatore, ricavata in precedenza, può essere espressa nel modo seguente:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r-\delta}{\gamma} = \frac{f'(k) - n - \lambda - \delta}{\gamma}$$

Essendo $f(k)$ una funzione crescente e concava di k, è evidente che la *golden rule* ($f'(k^*) = n+\lambda$) non è più valida se si prende in considerazione il programma d'ottimo intertemporale del consumatore con $\delta > 0$. In particolare, il valore del capitale pro capite k^{**} che massimizza il consumo pro capite per ogni istante di tempo (che cioè rende $\dot{c} = 0$) è minore del valore k^* stabilito dalla *golden rule*.[12] Per valori di k superiori a k^{**} il consumo istantaneo risulterà decrescente mentre per valori di k inferiori a k^{**} sarà crescente. D'altra parte,

[11] Nel problema del consumatore la ricchezza pro capite $a(t)$ può essere posta pari allo stock di capitale pro capite $k(t)$.

[12] V. [Ramsey, 1928].

dall'*equazione fondamentale della teoria della crescita*, $\dot{k} = f(k) - c - (n+\lambda)k$, risulta che k diminuisce nel tempo se $c > f(k) - (n+\lambda)k$ mentre aumenta se $c < f(k) - (n+\lambda)k$.

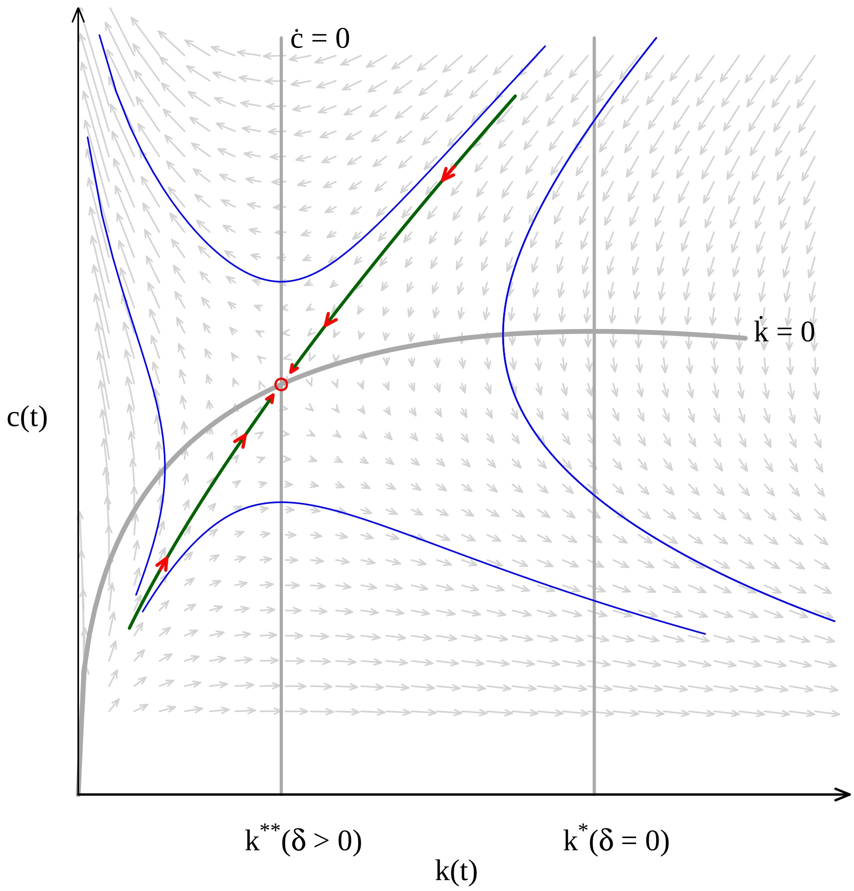
Dall'analisi del sistema:[13]

$$\dot{c} = \frac{f'(k) - n - \lambda - \delta}{\gamma} c$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\lambda)k$$

si può mostrare che, in funzione delle condizioni iniziali assegnate, esiste un sentiero di sella per le variabili c e k che converge ad un equilibrio di stato stazionario.

Figura 1: L'effetto dell'impazienza in un modello alla Ramsey-Solow



[13]Si assume che l'*elasticità di sostituzione intertemporale sia costante*.

Riferimenti bibliografici

[Gandolfo, 1973] Gandolfo, G. (1973). *Metodi di dinamica economica - 1st ed.* ISEDI, Milano.

[Kameien and Schwartz, 1991] Kameien, M. I. and Schwartz, N. L. (1991). *Dynamic Optimization The Calculus Of Variations And Optimal Control In Economics And Management - 2nd ed.* Elsevier Science Publishing Co. Inc., New York.

[Michel, 1990] Michel, P. (1990). Some clarifications on the transversality condition. *Econometrica*, Vol. 58(3):705–723.

[Ramsey, 1928] Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *Economic Journal*, Vol. 38(152):543–559.

[Romer, 2006] Romer, D. (2006). *Advanced Macroeconomics - 3th ed.* McGraw-Hill.

[Solow, 1956] Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70(1):65–94.

[Sydsaeter et al., 2008] Sydsaeter, K., Hammond, P., Seierstad, A., and Strom, A. (2008). *Further Mathematics for Economic Analysis, s. e.* Prentice Hall, New York.

Indice