COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Domenico Suppa, 26/08/2010

Dato un insieme A costituito da n elementi, il numero delle combinazioni con ripetizione di classe k che si possono ottenere prendendo k degli n elementi di A (dove k è maggiore o minore di n) può essere determinato distribuendo le unità del numero intero k tra n variabili intere (diciamo: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$):

$$k = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Ad esempio, per k=5 e n=3 una possibile soluzione della precedente equazione è:

k	=	x_1	$+ x_2$	$+ x_3$
5	=	3	+ 0	+ 2
		1		1
		1		1
		1		

ognuna delle n variabili ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) può essere concepita come un contenitore (la cella di una griglia) nel quale riporre da 0 a k unità (con gli altri contenitori, o variabili, che accolgono le restanti unità):

Si tratta quindi di calcolare il numero delle possibili ripartizioni delle k unità negli n contenitori (le n variabili). Oppure, più semplicemente, si può immaginare di ripartire le k unità in n gruppi (le n variabili) alcuni dei quali possono essere vuoti. Quante saranno le possibili ripartizioni delle k unità?
Consideriamo una partizione in due sottoinsiemi dell'insieme delle combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k, $C'_{n,k}$, definita nel modo seguente: nel primo sottoinsieme comprendiamo tutte le combinazioni che non includono il primo contenitore (o variabile); tali combinazioni sono in numero di $C'_{n-1,k}$. Tolto il primo contenitore, infatti, restano solo $n-1$ contenitori da combinare mediante l'attribuzione delle k unità (le unità non possono essere meno di k perché viene escluso il primo contenitore e quindi tutte le k unità devono essere distribuite nei rimanenti). Nel secondo sottoinsieme facciamo ricadere tutte le combinazioni che includono il primo contenitore; esse saranno in numero di $C'_{n,k-1}$. Infatti, in questo caso, almeno un'unità dovrà essere permanentemente riposta nel primo contenitore (in modo da includerlo in tutte le combinazioni possibili) mentre le altre $k-1$ unità potranno essere distribuite tra tutti gli n contenitori (compreso il primo). È evidente allora che otterremo la formula ricorsiva:

$$C'_{n,k} = C'_{n-1,k} + C'_{n,k-1}$$

Inoltre $C'_{1,k} = 1$, perché k unità messe in un solo contenitore possono dare luogo ad un'unica combinazione, e $C'_{n,1} = n$, perché una sola unità che può essere distribuita in n contenitori diversi da luogo ad n possibili combinazioni. Pertanto si può calcolare, facendo variare k:

$$C'_{2,2} = C'_{1,2} + C'_{2,1} = 1 + 2 = 3$$
$$C'_{2,3} = C'_{1,3} + C'_{2,2} = 1 + 3 = 4$$
$$C'_{2,4} = C'_{1,4} + C'_{2,3} = 1 + 4 = 5$$

e poi, facendo variare n:

$$C'_{3,2} = C'_{2,2} + C'_{3,1} = 3 + 3 = 6$$
$$C'_{3,3} = C'_{2,3} + C'_{3,2} = 4 + 3 = 7$$
$$C'_{3,4} = C'_{2,4} + C'_{3,3} = 5 + 3 = 8$$

Agli stessi risultati si perviene calcolando le combinazioni senza ripetizione di (n+k-1) oggetti di classe k, $C_{n+k-1,k}$:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Utilizzando la formula di Stiefel[1] $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ si può anche scrivere:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = C_{n+k-2,k} + C_{n+k-2,k-1}$$

Inoltre, risulta:

$$C_{1+k-1,k} = 1$$
$$C_{n+1-1,1} = n$$

Si è cosi ottenuta una esplicita regola di calcolo per le combinazioni con ripetizione che soddisfa la definizione ricorsiva enunciata sopra. Per la legge delle classi complementari risulta inoltre: $C_{n+k-1,k} = C_{n+k-1,n+k-1-k} = C_{n+k-1,n-1}$.

Riprendiamo l'equazione (diofantea):

$$k = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

con k e n dati. I simboli + possono essere considerati come i separatori degli n gruppi di unità (le variabili). Per l'esempio proposto avremo che la soluzione (3, 0, 2) potrà essere rappresentata dallo schema:

111++11.

[1] Tale uguaglianza si dimostra facilmente sviluppando i due addendi dell'ultimo membro.

Tutte le possibili permutazioni di questi n-1+k elementi comprendono anche le permutazioni delle k unità e degli n-1 simboli + che sono tra loro indistinguibili (e quindi non ordinabili). Evidentemente l'ordine delle unità e dei simboli non è rilevante ma è importante solo la loro posizione relativa. Siamo in definitiva ricondotti alla determinazione di tutti i possibili anagrammi della parola:

$$\Lambda\Lambda\Lambda OO\Lambda\Lambda$$

nella quale le Λ corrispondono alle unità e le O corrispondono ai simboli +. Il numero degli anagrammi possibili è pari a:

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)...(n+1)n(n-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)...(n+1)n}{k!}$$

e, pertanto, abbiamo ancora $C'_{n,k} = C_{n+k-1,k}$.

L'equazione $k = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ definisce in modo esplicito la seguente funzione non decrescente (dove $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali):

$$k\text{:} \ \left\{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{N}_i\right\} \ \rightarrow \ \mathbb{N}$$

e la sua inversa individua una corrispondenza le cui immagini sono costituite da tutte le possibili soluzioni dell'equazione di partenza (per ogni fissato $k \in \mathbb{N}^+$). Tali soluzioni sono in numero di $C'_{n,k}$. Se poi limitiamo la nostra indagine agli interi strettamente maggiori di zero (posto a fortiori $k \geq n > 0$, perché altrimenti qualche variabile dovrebbe assumere valore zero) possiamo ancora determinare il numero di soluzioni possibili dell'equazione $k = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$, sostituendo le variabili x_i con le variabili $y_i = x_1$-1, in modo da ottenere l'equazione[2]:

$$k - n = y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n$$

le cui soluzioni sono in numero pari a $C'_{n,k-n} = C_{n+(k-n)-1,k-n} = C_{k-1,k-n} = \binom{k-1}{k-n}$, ma visto che (per la legge delle classi complementari) $C_{n,k} = C_{n,n-k}$, abbiamo:

$$\binom{k-1}{k-n} = C_{k-1,k-n} = C_{k-1,k-1-k+n} = C_{k-1,n-1} = \binom{k-1}{n-1} \ .$$

2 Per una esemplificazione di questo problema si può pensare alle possibili distribuzioni della ricchezza totale monetaria di una collettività tra tutti gli individui che la costituiscono di modo che ad ognuno di essi sia assegnata almeno una quota minima pari all'unità di suddivisione della ricchezza.